1984

DURÉE : 4 heures

Dans le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls.

PREMIÈRE PARTIE

Soient 2 suites de nombres réels $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$, les réels b_n étant tous non nuls.

On considère alors les deux autres suites $(A_n)_{n\geqslant 0}$ et $(B_n)_{n\geqslant 0}$ définies par récurrence par :

$$A_0 = 0 \qquad A_1 = a_1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad A_n = b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2}$$

et

$$B_0 = 1 \qquad B_1 = b_1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad B_n = b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}$$

Montrer qu'il existe des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telles que B_n soit non nul pour tout entier n.

On suppose dans toute la suite du problème que B_n est non nul pour tout entier n et on pose :

$$\forall n \geqslant 0 \qquad u_n = \frac{A_n}{B_n}.$$

1° Calculer u_0. Calculer u_1 en fonction de a_1 et b_1, puis u_2 en fonction de a_1, b_1 et $\frac{a_2}{b_2}$.

2° Montrer, par exemple par récurrence, que

$$\forall n \qquad n \in \mathbb{N} \qquad A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} = (-1)^n \prod_{i=1}^{i=n+1} a_i.$$

Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ si l'un des nombres a_i est nul?

Dans la suite, on suppose tous les a_i non nuls.

3° On suppose dans cette question :

$$b_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad a_n + b_n = 1.$$

a. Déterminer la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ puis $u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a même nature que la série de terme général $v_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{i=n+1} a_i$.

b. Étudier le cas :

$$a_1 = c_1x, \qquad \forall n \qquad n \geqslant 2 \qquad a_n = -\frac{c_n}{c_{n-1}}x$$

où $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathbb{R}^*$ et x un nombre réel. Que peut-on dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

Exemple : $a_1 = x$ et $\forall n \quad n \geqslant 2 \quad a_n = \frac{n-1}{n}x$.

c. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par :

$$a_1 = x \quad \text{et} \quad \forall n \quad n \geqslant 2 \quad a_n = \frac{2n-1}{2n+1}x^2.$$

4° Dans cette question et les suivantes, on suppose que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ vérifient la condition (𝒞)

$$(\mathcal{C}) \qquad \forall n \quad n \geqslant 1 \qquad |b_n| > |a_n| + 1$$

a. Montrer que :

$$\forall n \qquad n \geqslant 2 \qquad |B_n| \geqslant |b_n||B_{n-1}| - |a_n||B_{n-2}|$$

et

$$\forall n \qquad n \geqslant 2 \qquad |B_n| - |B_{n-1}| > |a_n|(|B_{n-1}| - |B_{n-2}|)$$

b. Déduire de la question précédente :

1° La stricte croissance de la suite $(|B_n|)_{n\geqslant 0}$.

.../...

2° Une majoration de $\left|\prod_{i=2}^{i=n} a_i\right|$.

c. Montrer que la série de terme général :

$$\frac{1}{|B_n|} - \frac{1}{|B_{n+1}|}$$

est convergente. Montrer également la convergence absolue de la série $\sum_{n=2}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$?

5° On suppose $\forall n \quad n \geqslant 1 \quad a_n = -1$ et $b_n = \frac{1}{q}[p - 4(n-1)^2]$

où p et q sont deux nombres réels donnés avec $q \neq 0$.

a. Soit $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ des couples (p, q) tels que la condition $(\mathcal{C})$ soit vérifiée. On demande de représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{E}$. On étudiera successivement les cas :

$$p < 0, \quad 0 \leqslant p < 4, \quad 4 \leqslant p < 16$$

et on généralisera. Montrer que $\mathcal{E}$ contient des couples $(p, 1)$.

Dans la suite du problème, on utilisera de tels couples; dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ associée est convergente; sa limite, qui peut dépendre de p, sera notée l.

b. Soit un couple $(p, 1) \in \mathcal{E}$, montrer qu'à partir d'un certain rang n_1, on a

$$\left|\frac{B_n}{B_{n-1}}\right| > n^2$$

Que peut-on en déduire pour la suite $(|B_n|)_{n \geqslant 1}$?

c. Soient deux entiers n et m vérifiant :

$$n_1 < m < n - 1.$$

Montrer :

$$|u_n - u_m| \leqslant \sum_{k=m}^{k=n-1} \frac{1}{|B_k B_{k+1}|} \leqslant \frac{1}{B_m^2}\left[1 + \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k^4}\right]$$

et en déduire qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall m \quad m > n_1 \quad |u_m - l| \leqslant \frac{K}{B_m^2}.$$

6° p étant fixé, on pose : $b_n = p - 4(n-1)^2$ où $(p, 1) \in \mathcal{E}$. S_p désigne l'ensemble des suites de nombres réels $(s_n)_{n \geqslant 0}$ qui vérifient :

$$\forall n \quad n \geqslant 2 \quad s_n = b_n s_{n-1} - s_{n-2}$$

Cet ensemble est muni des deux opérations habituelles « somme de deux suites » et « produit d'une suite par un réel ».

a. Montrer que S_p muni de ces deux opérations est un espace vectoriel réel de dimension deux.

En déduire que :

$$\forall (s_n)_{n \geqslant 0} \in S_p, \ \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que :}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = \lambda A_n + \mu B_n = B_n(\lambda u_n + \mu).$$

b. Étant donnée une suite $(s_n)_{n \geqslant 0}$ dans S_p, montrer que seules deux éventualités (e_1) et (e_2) sont possibles :

(e_1) $\quad \forall n \geqslant 1 \quad |s_n| \leqslant |s_{n-1}|$

(e_2) $\quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \quad n > N_1 : |s_n| > |s_{n-1}|$

Dans l'éventualité (e_2), la suite $(|s_n|)_{n \geqslant 0}$ peut-elle converger vers une limite finie?

(On pourra s'inspirer des raisonnements concernant la suite $(|B_n|)_{n \geqslant 0}$).

c. Soit $(s_n)_{n \geqslant 0}$ un élément donné de S_p. Montrer l'équivalence :

$$\lambda l + \mu = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = 0$$

(On utilise les notations de la question I.5° et on pourra se servir des relations entre les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(B_n)_{n \geqslant 0}$ établies dans I.5°.)

d. On suppose $\lambda l + \mu = 0$ et que la suite $(|s_n|)_{n \geqslant 0}$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang.

On pose $\beta_n = \left|\frac{s_n}{s_{n-1}}\right|$, montrer que :

.../...

$1°$ $\beta_n \leqslant 1$.

$2°$ $\exists N_2 \quad N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2 \Rightarrow \dfrac{1}{\beta_{n-1}} \geqslant |b_1| - \beta_n > n$.

En déduire qu'il existe une constante K_1 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |s_n| < \frac{K_1}{n!}$$

Deuxième partie

$1°$ On désigne par P l'espace vectoriel des fonctions f réelles, paires, périodiques de période π, développables en séries trigonométriques conformément à la formule :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{s_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(2nx).$$

où la série de terme général $|s_n|$ est convergente. On admettra dans la suite, que si $f \in P$, le développement (1) est unique. On pourra ainsi parler des « coefficients » de f comme étant les nombres s_n.

a. Montrer que si $f \in P$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f \in P$ de coefficients s_n. Montrer que si la série de terme général $n^2 s_n$ est absolument convergente, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde est encore dans P.

c. Soit $f \in P$, montrer que la fonction $x \rightsquigarrow f(x) \cos 2x$ est encore dans P. Quels sont ses coefficients?

$2°$ On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre E_p.

$$E_p : y'' + (p - 2\cos 2x)\, y = 0$$

où $(p, 1) \in \mathcal{E}$ (cf. I.5°). On note P_p, l'ensemble des solutions de E_p sur $\mathbb{R}$ qui appartiennent à P.

a. Soit c_p un élément de P_p de coefficients s_n. On suppose que la série de terme général $n^2 s_n$ est absolument convergente. Montrer que les coefficients s_n vérifient :

$$p s_0 = 2 s_1$$

et $\forall n \quad n \geqslant 1 \quad (p - 4n^2) s_n = s_{n+1} + s_{n-1}$. En déduire que la suite $(s_n)_{n \geqslant 0}$ appartient à S_p.

b. Montrer qu'une condition suffisante pour que P_p ne soit pas réduit à $\{0\}$ s'exprime par $lp + 2 = 0$ (notations du I.6°).

$3°$ On suppose dans cette question que $lp + 2 = 0$. c_p étant un élément fixe de P_p, on étudie la fonction :

$$x \rightsquigarrow G(x) = \int_0^{\pi} \cos(2 \cos\theta \cos x)\, c_p(\theta)\, d\theta$$

a. Soit la fonction $g : x \rightsquigarrow g(x) = \cos(2\cos\theta\cos x)$ dépendant du paramètre θ ($\theta \in [0, \pi]$). Montrer que :

$$\forall \theta \qquad \forall h \neq 0 \qquad \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| \leqslant 3|h|$$

b. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale définie.

c. Montrer que G est une fonction paire, périodique de période π et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. Par des intégrations par parties, exprimer $\int_0^{\pi} \cos(2\cos\theta\cos x)\, c_p''(\theta)\, d\theta$ à l'aide d'intégrales ne faisant intervenir que $c_p(\theta)$ et non ses dérivées.

e. Montrer que G vérifie :

$$G''(x) + [(p+2) - 4\cos^2 x]\, G(x) = 0$$

f. Montrer qu'il existe une constante réelle α telle que $G = \alpha c_p$.

En utilisant $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donner une expression de α en fonction des coefficients s_n de la fonction c_p.